

Chapitre XIV-A : Algèbre Linéaire



Retranscrit par Samy Youssoufine

27 mars 2026

UM6P

University
Mohammed VI
Polytechnic

EMINES
School of Industrial Management



Note importante

WIP. Peut contenir des erreurs ou des sections incomplètes.

Table des matières

1	Définitions	3
2	Sous-espaces vectoriels	5
2.1	Caractérisation d'un sous-espace vectoriel	5
2.2	Sous-espace vectoriel engendré	7
3	Famille génératrice, libre et bases	9
3.1	Famille génératrice	9
3.2	Famille libre	10
3.3	Bases	14
4	Espace vectoriel de dimension finie	17
4.1	Théorème de la base incomplète	17
4.2	Dimension d'un \mathbb{K} -ev.	19
4.3	Dimension d'un sous-espace vectoriel	22
4.4	Espace produit	25
4.5	Rang d'une famille de vecteurs	26
4.6	Famille échelonnée	28
5	Somme d'une famille de sous-espaces vectoriels	31
5.1	Somme de deux sous-espaces vectoriels	31
5.2	Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels	35
5.3	Dimension de la somme de sous-espaces vectoriels	37
6	Hyperplans	41

Ce chapitre est consacré à l'algèbre linéaire. Nous traiterons les espaces vectoriels.

1 Définitions

Définition 1.1.0.1 (Espace vectoriel)

Soit \mathbb{K} un corps commutatif.

$(E, +, \cdot)$ est dit \mathbb{K} -espace vectoriel (ou \mathbb{K} -ev.) lorsque :

1. $(E, +)$ est un groupe abélien.
2. $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ est une loi de composition externe (LCE), donc une application vérifiant :
 - ▶ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$
 - ▶ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$
 - ▶ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u).$
 - ▶ $\forall u \in E, 1 \cdot u = u.$

Attention

Il faut faire attention à ne pas confondre les notations $+$ et \cdot dans E et \mathbb{K} .

Propriété 1.1.0.1

Soit E un \mathbb{K} -ev. Alors :

- ▶ $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot x = 0_E \iff \alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E.$
- ▶ $\forall x \in E, -1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x.$

Preuve

▶ Démonstration de la première propriété :

- ▷ Dans le sens indirect \iff , $0_{\mathbb{K}} \cdot x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x$, donc $(0_{\mathbb{K}} \cdot x) + (-0_{\mathbb{K}} \cdot x) = (0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x) + (-0_{\mathbb{K}} \cdot x)$, donc $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$.
- ▷ On a aussi $\forall \alpha \in \mathbb{K}, 0_E \cdot \alpha = 0_E \implies 0_E = 0_E \cdot \alpha = (0_E + 0_E) \cdot \alpha = 0_E \cdot \alpha + 0_E \cdot \alpha$, donc $0_E = 0_E \cdot \alpha$.
- ▷ Dans le sens direct \implies , on suppose que $\alpha \cdot x = 0_E$. Si $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors $\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot 0_E$, donc $1_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$, donc $x = 0_E$.

▶ Démonstration de la deuxième propriété :

▷ On a $-1_{\mathbb{K}} \cdot x + x = (-1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$, donc $-1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x$. ■

🗨 **Remarque 1.1.0.1**

1. On déduit de la première et deuxième propriété de la définition et de la deuxième propriété précédente que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \begin{cases} (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x \\ \alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y \end{cases}$$

2. Les éléments de E sont appelés des vecteurs, les éléments de \mathbb{K} sont appelés des scalaires.

✎ **Exemple 1.1.0.1**

1. Si \mathbb{K} est un corps commutatif, alors \mathbb{K}^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ est un \mathbb{K} -ev avec les lois de composition suivantes :

- ▶ $\forall u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n, u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$.
- ▶ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda \cdot u = (\lambda \cdot u_1, \dots, \lambda \cdot u_n)$.

2. Si E est un corps et \mathbb{K} est un sous-corps commutatif de E , alors E est un \mathbb{K} -ev dont la loi de composition externe est la multiplication de E . Par exemple, \mathbb{C} est un \mathbb{R} -ev.

$$\mathbb{K} \times E \rightarrow E, (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x = \lambda x$$

3. Si \mathbb{K} est un corps commutatif et D est un ensemble non-vide, alors $(\mathbb{K}^D, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -ev, avec :

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^D, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} x + y : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto x(t) + y(t) \end{cases} \\ \lambda \cdot x : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \lambda \cdot x(t) \end{cases} \end{cases}$$

2 Sous-espaces vectoriels

☰ Définition 2.2.0.2

Soit E un \mathbb{K} -ev, et soit F une partie de E .
On dit que F est un sous-espace vectoriel (sous-ev.) de E lorsque F est lui-même un \mathbb{K} -ev pour les lois de composition induites par celles de E .

2.1 Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

✔ Propriété 2.2.1.2 (*Caractérisation d'un sous-espace vectoriel*)

Soit E un \mathbb{K} -ev, et soit F une partie de E .
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. F est un sous-ev. de E .
2. $F \neq \emptyset$, et pour tous $x, y \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a $\alpha x + \beta y \in F$.
3. $0_E \in F$, et pour tous $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x + y \in F$ (très pratique pour montrer que F est un sous-ev. de E).

🔍 Preuve

Pour démontrer ces équivalences, on va suivre un raisonnement circulaire classique en montrant que (1) \implies (2), (2) \implies (3), et (3) \implies (1).

► Montrons que (1) \implies (2) :

▷ On a F est un \mathbb{K} -ev., alors $(F, +)$ est un groupe abélien, donc $F \neq \emptyset$.

▷ Donc $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \begin{cases} \alpha x \in F \\ \beta y \in F \end{cases}$

▷ Donc $\alpha x + \beta y \in F$.

► Montrons que (2) \implies (3) :

▷ On sait que $F \neq \emptyset$.

▷ Donc pour $\alpha = \beta = 0_{\mathbb{K}}$, et $y = x \in F$, on a $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x \in F$.

- ▷ Donc $\forall \alpha \beta$ qu'on fixe sur $(1_{\mathbb{K}}, \lambda) \in \mathbb{K}^2, \forall x, y \in F, \lambda x + y \in F$.
- ▶ Montrons que (3) \implies (1) :
 - ▷ $0_E \in F$, et pour tous $x, y \in F, x - y \in F$ (en prenant $\lambda = -1_{\mathbb{K}}$).
 - ▷ Donc F est un sous-groupe de $(E, +)$.
 - ▷ Donc $(F, +)$ est un groupe abélien.
 - ▷ On a pour $x = 0_E$, et pour tous $\lambda, y \in \mathbb{K} \times F, 0_E + \lambda \cdot y \in F$, donc $\lambda \cdot y \in F$.
 - ▷ Donc \cdot est une loi de composition externe de F .
 - ▷ Les propriétés de la loi de composition externe sont vérifiées dans F car elles sont vérifiées dans E .
 - ▷ Donc F est un \mathbb{K} -ev. ■

Exemple 2.2.1.2

- ▶ Soient E un \mathbb{K} -ev. et $a \in E \setminus \{0_E\}$. L'ensemble $\mathbb{K} \cdot a = \{\lambda \cdot a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est appelé la droite vectorielle engendrée par a , et est un sous-ev. de E .
- ▶ $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ n'est pas un sous-ev. de \mathbb{R}^2 , parce que $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans F , mais pas leur somme $(1, 1)$.
- ▶ Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0\}$. Alors H est un sous-ev. de \mathbb{K}^n , appelé l'hyperplan de \mathbb{K}^n d'équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$.
 - ▷ On a bien $H \subset \mathbb{K}^n$.
 - ▷ On a $\sum_{i=1}^n a_i \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, donc $0_{\mathbb{K}^n} \in H$.
 - ▷ Soient $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in H$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\sum_{i=1}^n a_i (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_i y_i = 0_{\mathbb{K}}$, donc $\lambda x + y \in H$.
 - ▷ Et on a bien $\sum_{i=1}^n a_i (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_i y_i = 0_{\mathbb{K}}$, donc $\lambda x + y \in H$.
 - ▷ Donc H est un sous-ev. de \mathbb{K}^n .
- ▶ $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ est un sous-ev. de \mathbb{K}^I .
- ▶ $\mathbb{K}[X]$ est un sous-ev. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- ▶ $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-ev. de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété 2.2.1.3

Soit E un \mathbb{K} -ev.

1. Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ev. de E , alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-ev. de E .
2. Soient F, G deux sous-ev. de E . Alors $F \cup G$ est un sous-ev. de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Q Preuve

► Démonstration de la première propriété...

- ▷ **Inclusion :** $\bigcap_{i \in I} F_i \subset E$.
- ▷ On sait aussi que $\forall i \in I, 0_E \in F_i \implies 0_E \in \bigcap_{i \in I} F_i$.
- ▷ Soient $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\forall i \in I, x, y \in F_i$, donc $\lambda x + y \in F_i$, donc $\lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$, sachant que F_i est un sous-ev. de E .
- ▷ On en déduit que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-ev. de E .

► Démonstration de la deuxième propriété...

- ▷ Dans le sens indirect \Leftarrow , si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est un sous-ev. de E . De même, si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$ est un sous-ev. de E .
- ▷ Dans le sens direct \Rightarrow , on utilise la définition d'un sous-espace vectoriel.
- ▷ En effet, comme $F \cup G$ est un sous-ev. de E , alors $F \cup G$ est un sous-groupe de $(E, +)$.
- ▷ D'après les propriétés des groupes, on a bien $F \subset G$ ou $G \subset F$.

■

2.2 Sous-espace vectoriel engendré

📖 Définition 2.2.2.3 (Sous-espace vectoriel engendré)

Soient E un \mathbb{K} -ev. et A une partie de E .

$\bigcap_{ACF} \text{sev. de } E$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par A , et est noté $\text{Vect}(A)$.

✅ Propriété 2.2.2.4

Il s'agit du plus petit sous-ev. de E contenant A .

💬 Remarque 2.2.2.2

1. Si $F = \text{Vect}(A)$, alors on dit que A est une partie génératrice de F .
2. $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$, et $\text{Vect}(\{x\}) = \mathbb{K} \cdot x$.
3. **Important :** Soit E un \mathbb{K} -ev. et A une partie non-vide de E .
 $x \in \text{Vect}(A) \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists a_1, \dots, a_n \in A, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$
 Le terme $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ est appelé une combinaison linéaire de a_1, \dots, a_n .
 i.e. $\text{Vect}(A) = \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \text{ tel que } n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}$.

 **Exemple 2.2.2.3**

1. Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, alors $\text{Vect}(A)$ est noté $\text{Vect}(a_1, \dots, a_n)$, et est égal à $\{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \text{ tel que } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$.
2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x - 2y + z = 0\}$.
 - a) On a $F = \{(2y - z, y, z) \text{ tels que } y, z \in \mathbb{R}\}$.
 - b) Donc $F = \{y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \text{ tel que } y, z \in \mathbb{R}\}$.
 - c) Donc $F = \text{Vect}((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$.
3. On a $\mathbb{K}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \text{ tel que } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\} = \{\sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ tel que } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}$, où e_i est le vecteur de \mathbb{K}^n dont la i -ème composante est égale à $1_{\mathbb{K}}$, et les autres composantes sont égales à $0_{\mathbb{K}}$ (donc $e_k = (0, \dots, \underbrace{0}_{\text{pos. } k}, 0, \dots, 0)$).
4. $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}((X^k)_{k \in \mathbb{N}})$.
 - a) En effet, $\exists d \in \mathbb{N}, \exists \alpha_0, \dots, \alpha_d \in \mathbb{K}$ tel que $P = \sum_{k=0}^d \alpha_k X^k$.
5. $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n) = \text{Vect}((X^k)_{0 \leq k \leq n})$.
6. $F = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ telle que } f'' + 2f' - 3f = 0\}$
 - a) Donc $F = \{f : t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t} \text{ tel que } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
 - b) Donc $F = \text{Vect}(e^t, e^{-t})$.

 **Propriété 2.2.2.5**

Soient E un \mathbb{K} -ev. et A, B deux parties de E . Alors :

1. $\text{Vect}(A) = A \iff A$ est un sous-ev. de E .
2. $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.
3. $A \subset B \implies \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
4. $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(B) \iff \begin{cases} A \subset \text{Vect}(B) \\ B \subset \text{Vect}(A) \end{cases}$.

 **Preuve**

► Démonstration de la quatrième propriété.

▷ Dans le sens direct (\implies), $A \subset \text{Vect}(A) = \text{Vect}(B)$, et $B \subset \text{Vect}(B) = \text{Vect}(A)$.

▷ Dans le sens indirect (\impliedby)

— $A \subset \text{Vect}(B) \xrightarrow{(3)} \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(\text{Vect}(B)) \xrightarrow{(2)} \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$,

— et $B \subset \text{Vect}(A) \xrightarrow{(3),(2)} \text{Vect}(B) \subset \text{Vect}(A)$, donc $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(B)$. ■

3 Famille génératrice, libre et bases

3.1 Famille génératrice

Définition 3.3.1.4

Soient E un \mathbb{K} -ev. et $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E lorsque $\text{Vect}(e_i, i \in I) = E$.

i.e. lorsque $\forall x \in E, \exists J$ sous-ensemble fini de $I, \exists (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^{\text{card}(J)}$ tel que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$.

Note : on ne peut pas définir cette famille génératrice à partir de la combinaison linéaire de tous les éléments de la famille, car il peut y en avoir une infinité.

Remarque 3.3.1.3

Si I est fini tel que $\text{card}(I) = p \in \mathbb{N}^*$, alors :

$(e_i)_{i \in I}$ famille génératrice de $E \iff \forall x \in E, \exists (\lambda_k)_{k \in I} \in \mathbb{K}^p$ tels que $x = \sum_{k \in I} \lambda_k e_k$

Si $I = \{1, \dots, p\}$, alors :

(e_1, \dots, e_p) famille génératrice de $E \iff \forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k$

Exemple 3.3.1.4

1. $\mathbb{K}^n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, donc (e_1, \dots, e_n) (la base canonique) est une famille génératrice de \mathbb{K}^n .
2. $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}((X^k)_{k \in \mathbb{N}})$, donc $((X^k)_{k \in \mathbb{N}})$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.
3. $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$, donc $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

✓ Propriété 3.3.1.6

Toute surfamille d'une famille génératrice est une famille génératrice.
i.e. si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , et J est un sous-ensemble de I tel que $I \subset I'$, alors $(e_i)_{i \in I'}$ est une famille génératrice de E .

Q Preuve

On a $\forall x \in E, \exists J \subset I$ fini, $\exists (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^{\text{card}(J)}$ tel que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$, or $I \subset I'$, donc J est aussi un sous-ensemble de I' , donc $(e_i)_{i \in I'}$ est une famille génératrice de E . ■

H Exercice 3.3.1.1

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } \int_0^1 P(t) dt = 0\}$ est un sous-ev. de $\mathbb{R}_3[X]$, puis trouver une famille génératrice de F .

3.2 Famille libre

☰ Définition 3.3.2.5 (Famille libre et famille liée)

Soit E un \mathbb{K} -ev.

1. Une famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de E est dite **libre** lorsque :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$

Dans le cas contraire, la famille est dite liée.

2. **S'il y a une infinité d'éléments**, Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite libre lorsque :

$$\forall J \text{ sous-ensemble fini de } I, \forall (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^{\text{card}(J)}, \sum_{j \in J} \lambda_j e_j = 0_E \implies \forall j \in J, \lambda_j = 0_{\mathbb{K}}$$

🗨 Remarque 3.3.2.4

1. Toute famille qui contient le 0_E est liée, car $1_{\mathbb{K}} \cdot 0_E = 0_E$.
2. $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée si et seulement si $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, pas tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$. Cela équivaut aussi à dire que $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $e_{i_0} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_0-1}, e_{i_0+1}, \dots, e_n)$.

→ **Conséquence 3.3.2.1**

On a $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}}^n\}$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$.
Donc $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, alors :

$$e_{i_0} = -\lambda_{i_0}^{-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n \lambda_k e_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_0-1}, e_{i_0+1}, \dots, e_n)$$

 **Exemple 3.3.2.5**

1. Dans \mathbb{K}^n , la famille (e_1, \dots, e_n) est libre, car :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E \implies \forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$$

2. $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

► Soit J un sous-ensemble fini de \mathbb{N} , par exemple $J = \{0, \dots, d\}$ tel que $d \in \mathbb{N}$.

► Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$, tels que $\sum_{k=0}^d \lambda_k X^k = 0_E \implies \forall k \in \{0, \dots, d\}, \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$ (car les polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux)

3. $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

4. Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts (pour simplifier les calculs).

Soit $l_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$ le polynôme de Lagrange associé à x_k . Alors (l_0, \dots, l_n) est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k l_k = 0_E$.

On a donc $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \sum_{k=0}^n \lambda_k \underbrace{l_k(x_i)}_{=\delta_{i,k}} = \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$.

 **Exercice 3.3.2.2**

Soient $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que $r \leq n$, et $0 \leq \deg(P_0) < \dots < \deg(P_r) \leq n$.

La famille (P_0, \dots, P_r) est dite famille échelonnée dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Montrer que (P_0, \dots, P_r) est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution :

Nous allons procéder par récurrence inverse sur $k \in \{0, \dots, r\}$.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^r \lambda_k P_k = 0$.

Donc $\lambda_r P_r = -\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k P_k$.

Si $\lambda_r \neq 0$, alors :

$$\deg(\lambda_r P_r) = \deg(P_r) \text{ et } \deg\left(-\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k P_k\right) \leq \max_{0 \leq k \leq r-1} \deg(P_k) = \deg(P_{r-1}) < \deg(P_r)$$

Ce qui est absurde, donc $\lambda_r = 0$.

Donc $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k P_k = 0$.

D'après le principe de récurrence, on a $\lambda_{r-1} = 0$, puis $\lambda_{r-2} = 0$, et ainsi de suite jusqu'à $\lambda_0 = 0$.

Solution plus rigoureuse :

Nous allons raisonner par absurde.

- ▶ Supposons que (P_0, \dots, P_r) n'est pas une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.
- ▶ Donc $\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^{r+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}}^{r+1}\}$ tel que $\sum_{k=0}^r \lambda_k P_k = 0$.
- ▶ On pose $s = \max(\{k \in \{0, \dots, r\} \text{ tel que } \lambda_k \neq 0\})$.
- ▶ Donc $\lambda_s P_s = -\sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k P_k$ et $\forall k > s, \lambda_k = 0$.
- ▶ Donc $\sum_{k=0}^s \lambda_k P_k = 0$.
- ▶ Donc $\lambda_s P_s = -\sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k P_k$.
- ▶ Donc $\deg(\lambda_s P_s) = \deg(P_s)$, et $\deg(-\sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k P_k) \leq \max_{0 \leq k \leq s-1} \deg(P_k) = \deg(P_{s-1}) < \deg(P_s)$.
- ▶ Ce qui est absurde, donc (P_0, \dots, P_r) est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 3.3.2.6

On pose $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\alpha x} \end{cases}$ (fonction exponentielle de base e^α).

$(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Justification :

- ▶ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$.
- ▶ On suppose que $(f_{\alpha_k})_{1 \leq k \leq n}$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- ▶ Donc $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}}^n\}$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_{\alpha_k} = 0$.
- ▶ Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda_k e^{\alpha_k x} = 0$.
- ▶ Soit $s = \max(\{k \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \lambda_k \neq 0\})$.
- ▶ Donc $\lambda_s \neq 0$ et $\forall k > s, \lambda_k = 0$.
- ▶ Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^s \lambda_k e^{\alpha_k x} = 0$.
- ▶ Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_s e^{\alpha_s x} = -\sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k e^{\alpha_k x}$.
- ▶ Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_s = -\sum_{k=1}^{s-1} \lambda_k e^{\underbrace{(\alpha_k - \alpha_s)}_{\leq 0} x}$.
- ▶ Par passage à la limite $x \rightarrow +\infty$, on a $\lambda_s = 0$, ce qui est absurde, donc $(f_{\alpha_k})_{1 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

✓ **Propriété 3.3.2.7**

Toute sous-famille d'une famille libre est une famille libre.

i.e. si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille libre de E , et $I' \subset I$, alors $(e_i)_{i \in I'}$ est une famille libre de E .

🔍 **Preuve**

Supposons que $(e_i)_{i \in I}$ est libre et soit $I' \subset I$.

Soit $J \subset I'$ un sous-ensemble fini de I' , alors $J \subset I$ et comme $(e_i)_{i \in I}$ est libre, alors $(e_j)_{j \in J}$ est libre, donc $(e_i)_{i \in I'}$ est libre. ■

★ **Théorème 3.3.2.1**

Soient e_1, \dots, e_{n+1} des éléments de E , un \mathbb{K} -ev.

$(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ est une famille libre de E si et seulement si :

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ est une famille libre de } E \text{ et } e_{n+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$$

🔍 **Preuve**

▶ **Démonstration dans le sens direct :**

- ▷ On a (e_1, \dots, e_n) est une sous-famille de $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$, donc (e_1, \dots, e_n) est une famille libre de E .
- ▷ Si $e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $e_{n+1} = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, donc $\sum_{k=1}^n (-\lambda_k) e_k + 1_{\mathbb{K}} e_{n+1} = 0$, ce qui est absurde, donc $e_{n+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

▶ **Démonstration dans le sens indirect :**

- ▷ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_k = 0$.
- ▷ Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors $e_{n+1} = -\lambda_{n+1}^{-1} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, ce qui est absurde, donc $\lambda_{n+1} = 0$.
- ▷ Alors $\lambda_{n+1} = 0$, donc $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$, et comme (e_1, \dots, e_n) est une famille libre de E , alors $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 0$.
- ▷ Donc $\forall k \in \{1, \dots, n+1\}, \lambda_k = 0$, donc $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ est une famille libre de E . ■

3.3 Bases

Définition 3.3.3.6

Soient E un \mathbb{K} -ev. et $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .
On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E lorsque :

1. $(e_i)_{i \in I}$ est une famille libre de E .
2. $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E .

Exemple 3.3.3.7

1. (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{K}^n .
2. $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
3. $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Alors les polynômes de Lagrange associés à x_0, \dots, x_n forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
 - ▶ En effet, on sait déjà que (l_0, \dots, l_n) est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ (voir l'exemple 5).
 - ▶ Montrons maintenant qu'il s'agit d'une famille génératrice.
 - ▷ Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $\deg(P) \leq n$, donc P est déterminé par ses valeurs en $n + 1$ points distincts, par exemple x_0, \dots, x_n .
 - ▷ Donc $\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(x_k) = \sum_{i=0}^n P(x_i)l_i(x_k) = P(x_k)$, donc $P = \sum_{i=0}^n P(x_i)l_i$, donc (l_0, \dots, l_n) est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
 - ▷ Sinon, on peut poser $Q = \sum_{i=0}^n P(x_i)l_i$, calculer sa différence avec P , montrer qu'il admet $n+1$ racines distinctes, et conclure que la différence est nulle, donc $P = Q$.
 - ▷ Donc $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P \in \text{Vect}(l_0, \dots, l_n)$, donc (l_0, \dots, l_n) est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Propriété 3.3.3.8

Soit E un \mathbb{K} -ev.

1. $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$$

2. B est une base de E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Q Preuve

► Démonstration de la première propriété :

- ▷ \implies : Soit B une famille génératrice de E . On a donc $\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Si $\exists \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k$, alors $\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \beta_k) e_k = 0$, donc $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k - \beta_k = 0$, donc $\lambda_k = \beta_k$ (sachant que B est une famille libre).
- ▷ \impliedby : On a $\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, donc B est une famille génératrice de E . De plus, si $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$, alors $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot e_k = 0$, (par unicité des scalaires) donc $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 0$, donc B est une famille libre.

► Démonstration de la deuxième propriété :

recop

★ Théorème 3.3.3.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un \mathbb{K} -ev. et e_1, \dots, e_n des éléments de E .
Si $v_1, \dots, v_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ alors (v_1, \dots, v_{n+1}) est liée.

Q Preuve

La démonstration se fait par récurrence sur n .

Initialisation : $n = 1$

Donc $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que :
$$\begin{cases} v_1 = \lambda_1 e_1 \\ v_2 = \lambda_2 e_1 \end{cases}$$

Si $\lambda_1 = 0$, alors $v_1 = 0$, donc (v_1, v_2) est liée.

Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $v_1 = \lambda_1 e_1$, donc $e_1 = \lambda_1^{-1} v_1$, donc $v_2 = \lambda_2 e_1 = \lambda_2 \lambda_1^{-1} v_1$, donc (v_1, v_2) est liée.

Hérédité : Supposons que la propriété est vérifiée pour $n - 1 \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'elle est vérifiée pour n .

- Soient $v_1, \dots, v_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
- Donc $\forall j \in \{1, \dots, n + 1\}, v_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
- Donc $\forall j \in \{1, \dots, n + 1\}, \exists (\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tels que $v_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} e_i$, i.e. :

$$\begin{cases} v_1 = \lambda_{1,1} e_1 + \dots + \lambda_{n,1} e_n \\ v_2 = \lambda_{1,2} e_1 + \dots + \lambda_{n,2} e_n \\ \vdots \\ v_{n+1} = \lambda_{1,n+1} e_1 + \dots + \lambda_{n,n+1} e_n (*) \end{cases}$$

- Si $\forall k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}, \lambda_{n,k} = 0$, alors $v_1, \dots, v_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, (v_1, \dots, v_{n+1}) est liée.
- Sinon, il existe $j_0 \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ tel que $\lambda_{n,j_0} \neq 0$.
- Comme les v_j jouent des rôles symétriques, on peut prendre $j_0 = n + 1$ sans perte de généralité, donc $\lambda_{n,n+1} \neq 0$.

- ▶ Alors, d'après l'équation (*), on a $e_n = \lambda_{n,n+1}^{-1} \left(v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,n+1} e_i \right)$.
- ▶ Donc, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,j} e_i + \lambda_{n,j} e_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,j} e_i \right) + \lambda_{n,j} \lambda_{n,n+1}^{-1} \left(v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,n+1} e_i \right) \end{aligned}$$

- ▶ On pose $w_j = v_j - \lambda_{n,j} \lambda_{n,n+1}^{-1} v_{n+1}$.
- ▶ On remarque que $(w_1, \dots, w_n) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.
- ▶ Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, la famille (w_1, \dots, w_n) est liée.
- ▶ Donc $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}}^n\}$ tel que $\sum_{j=1}^n \alpha_j w_j = 0$.
- ▶ Donc $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j + \left(-\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_{n,j} \lambda_{n,n+1}^{-1} \right) v_{n+1} = 0$, avec $\alpha_{n+1} = -\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_{n,j} \lambda_{n,n+1}^{-1}$.
- ▶ Donc $\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j v_j = 0$, avec $\alpha_{n+1} = -\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_{n,j} \lambda_{n,n+1}^{-1}$.
- ▶ Alors $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}}^{n+1}\}$.
- ▶ Donc (v_1, \dots, v_{n+1}) est liée. La propriété est vérifiée pour n , d'où la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

→ Conséquence 3.3.3.2

Si (e_1, \dots, e_n) est libre dans E , un \mathbb{K} -ev., et (g_1, \dots, g_m) est une famille génératrice de E , alors $n \leq m$.

Q Preuve

Supposons que $n > m$.

Donc $e_1, \dots, e_n \in \text{Vect}(g_1, \dots, g_m)$, donc (e_1, \dots, e_n) est liée, ce qui est absurde, donc $n \leq m$. ■

→ Conséquence 3.3.3.3

Soient E un \mathbb{K} -ev. et L une famille libre, G une famille génératrice et B une base de E .

Alors $\text{card}(L) \leq \text{card}(B) \leq \text{card}(G)$.

4 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 4.4.0.7 (Espace vectoriel de dimension finie)

Un espace vectoriel est dit de dimension finie si et seulement si il admet une famille génératrice finie.

Exemple 4.4.0.8

- ▶ \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -ev. de dimension finie, car (e_1, \dots, e_n) est une famille génératrice finie de \mathbb{K}^n .
- ▶ $\mathbb{K}_n[X]$ est un \mathbb{K} -ev. de dimension finie, car $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{K}_n[X]$.
- ▶ $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne sont pas des \mathbb{K} -ev. de dimension finie, car ils n'admettent pas de famille génératrice finie.

4.1 Théorème de la base incomplète

Nous allons initier le théorème de la base incomplète en utilisant deux propriétés.

- ▶ Nous allons voir que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.
- ▶ Nous allons aussi montrer qu'à partir d'une famille libre, on peut construire une base.

Propriété 4.4.1.9

Soient E un \mathbb{K} -ev. de dimension finie et $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ une génératrice de E . Si L_0 est une famille libre telle que $L_0 \subset G$, alors il existe B une base de E telle que $L_0 \subset B \subset G$.

Preuve

On pose $I = \{\text{card}(L) \mid L \text{ famille libre de } E, L_0 \subset L \subset G\}$.

- ▶ On a $\text{card}(L_0) \in I$, et $\forall L$ libre dans E , $\text{card}(L) \leq \text{card}(G) = m$.

- ▶ Donc I est un ensemble non-vide de \mathbb{N} , et majoré par m , donc I admet une borne supérieure, que nous allons noter $\max(I) = n$.
- ▶ D'où $\exists B$ libre dans E et $L_0 \subset B \subset G$ tel que $\text{card}(B) = n$.
- ▶ Montrons que B est génératrice de E , i.e. $\text{Vect}(B) = E = \text{Vect}(g_1, \dots, g_m)$.
 - ▷ Il faut donc montrer que

$$\begin{cases} B \subset \text{Vect}(g_1, \dots, g_m) \\ g_1, \dots, g_m \in \text{Vect}(B) \end{cases}$$

- ▷ On sait déjà que $B \subset \text{Vect}(g_1, \dots, g_m)$, car $B \subset G$ et G est une famille génératrice de E .
- ▷ Il faut maintenant montrer que $\{g_1, \dots, g_m\} \in \text{Vect}(B)$.
 - Nous allons procéder par absurde en supposant qu'il existe un k dans $\{1, \dots, m\}$ tel que $g_k \notin \text{Vect}(B)$.
 - Alors, comme B est libre, alors d'après le théorème précédent (Th. 1), la famille $B' = B \cup \{g_k\}$ est libre, avec $L_0 \subset B \subset B \cup \{g_k\} \subset G$.
 - Donc $\underbrace{\text{card}(B \cup \{g_k\})}_{=n+1} \in I$, ce qui est absurde.
- ▷ D'où $\forall i \in \{1, \dots, m\}, g_i \in \text{Vect}(B)$, donc $\text{Vect}(B) = E \implies B$ est génératrice de E .
- ▷ On en conclut que B est une base de E avec $L_0 \subset B \subset G$. ■

Remarque 4.4.1.5

Tout espace vectoriel (*non-nul*) de dimension finie admet une base.

Q Preuve

Soit $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ une famille génératrice de E .

La famille G peut contenir des g_k nuls. Mais, comme E est non-nul (et donc non réduit au singleton $\{0_E\}$), alors il existe au moins un g_k non nul, que nous allons noter g_{k_0} .

Alors $\{g_k\}$ est libre avec $\{g_k\} \subset G$, donc d'après la propriété précédente, il existe une base B de E telle que $\{g_{k_0}\} \subset B \subset G$. ■

✓ Propriété 4.4.1.10

Soient E un \mathbb{K} -ev. de dimension finie et G une famille génératrice de E .

Si L_0 est une famille libre de E alors il existe forcément B une base de E telle que $L_0 \subset B \subset L_0 \cup G$.

Q Preuve

G est une famille génératrice de E , alors $L_0 \cup G$ est aussi une famille génératrice de E , avec $L_0 \subset L_0 \cup G$. On réutilise alors la propriété précédente pour conclure qu'il existe une base B de E telle que $L_0 \subset B \subset L_0 \cup G$. ■

★ Théorème 4.4.1.3 (Théorème de la base incomplète/extraite)

Soit E un \mathbb{K} -ev. de dimension finie non réduit au singleton $\{0_E\}$.

1. Si L est une famille libre de E , alors on peut la "compléter" en une base de E . Autrement dit, il existe B une base de E telle que $L \subset B$.
2. Si G est une famille génératrice de E , alors on peut en extraire une base de E . Autrement dit, il existe B une base de E telle que $B \subset G$.

Q Preuve**► Démonstration de la première partie :**

- ▷ G est une famille génératrice de E , alors d'après la propriété 10, il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset L \cup G$.

► Démonstration de la deuxième partie :

- ▷ $L = \emptyset$ est une famille libre de E , alors d'après la propriété 9 et la remarque 5, il existe une base B de E telle que $\emptyset \subset B \subset G$, donc $B \subset G$. ■

4.2 Dimension d'un \mathbb{K} -ev.**☰ Définition 4.4.2.8 (Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie)**

Soit E un \mathbb{K} -ev. de dimension finie.

La dimension de E est le cardinal de toute base de E , noté $\dim_{\mathbb{K}} E$.

Par convention, on pose $\dim_{\mathbb{K}} \{0_E\} = 0$.

★ Théorème 4.4.2.4

Toutes les bases de E ont le même cardinal, donc la dimension de E est bien définie.

Q Preuve

On pose arbitrairement B_1 et B_2 deux bases de E .

► On a B_1 est libre et génératrice de E , et B_2 est une base de E , alors :

$$\text{card}(B_1) \leq \text{card}(B_2) \text{ et } \text{card}(B_2) \leq \text{card}(B_1)$$

► Donc $\text{card}(B_1) = \text{card}(B_2)$.

On en déduit que toutes les bases de E ont le même cardinal, donc la dimension de E est bien définie. ■

✎ Exemple 4.4.2.9

1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, car (e_1, \dots, e_n) est une base de \mathbb{K}^n .
2. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, car $(1, i)$ est une base de \mathbb{C} en tant que \mathbb{R} -ev.
3. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n+1$, car $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (attention à l'erreur classique de la poser n au lieu de $n+1$).

H Exercice 4.4.2.3

Soit $H = \{x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}$.

Montrer que H est un sous-ev. de \mathbb{R}^4 de dimension finie et donner la dimension de H .

Solution :

$$\begin{aligned} x \in H &\iff \begin{cases} x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 + x_4 \cdot e_4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \\ &\iff x = x_2 \underbrace{(2e_1 + e_2)}_{=V_1} + x_3 \underbrace{(-e_1 + e_3)}_{=V_2} + x_4 \underbrace{(3e_1 + e_4)}_{=V_3} \end{aligned}$$

Donc $H = \text{Vect}(V_1, V_2, V_3)$, donc H est un sous-ev. de \mathbb{R}^4 de dimension finie, et (V_1, V_2, V_3) est une famille génératrice de H .

Nous allons maintenant montrer que cette famille est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0$.

Comme (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de \mathbb{R}^4 , on a :

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc (V_1, V_2, V_3) est une famille libre de H .

Ainsi, (V_1, V_2, V_3) est une base de H , et donc $\dim H = 3$.

Conclusion : H est un sous-ev. de \mathbb{R}^4 de dimension finie, et $\dim_{\mathbb{R}} H = 3$.

✓ **Propriété 4.4.2.11**

Soit E un \mathbb{K} -ev. de dimension finie avec $\dim_{\mathbb{K}} E = n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\begin{cases} L \text{ est une famille libre de } E \\ \text{card}(L) = n \end{cases} \iff L \text{ est une base de } E$
2. $\begin{cases} G \text{ est une famille génératrice de } E \\ \text{card}(G) = n \end{cases} \iff G \text{ est une base de } E$

🔍 **Preuve**

- ▶ (\Leftarrow) Dans le sens indirect, le résultat est clair (si une famille est une base, alors elle est génératrice et dans un espace vectoriel de dimension n , elle est de cardinal n).
- ▶ (\Rightarrow) Dans le sens direct, on applique le théorème de la base incomplète (Th. 3) à la famille libre L et à la famille génératrice G pour construire une base B de E telle que $L \subset B \subset G$. Comme $\text{card}(L) = n$ et $\text{card}(B) = n$, alors $L = B$, donc L est une base de E . De même, comme $\text{card}(G) = n$ et $\text{card}(B) = n$, alors $G = B$, donc G est une base de E . ■

🏠 **Exercice 4.4.2.4**

Soit $(T_n)_n$ la famille de polynômes définie par :

$$T_0 = 1, T_1 = X, \text{ et } \forall n, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

(Polynômes de Tchebychev)

Montrer que (T_0, T_1, \dots, T_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

- ▶ **Famille libre :** (T_0, T_1, \dots, T_n) est une famille échelonnée de $\mathbb{R}_n[X]$, alors d'après l'exercice 2, (T_0, T_1, \dots, T_n) est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - ▷ Attention, il s'agit d'un cas particulier de famille échelonnée.
- ▶ **Cardinal :** (T_0, T_1, \dots, T_n) est une famille de cardinal $n + 1$. La dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est aussi $n + 1$.
- ▶ **Conclusion :** (T_0, T_1, \dots, T_n) est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n + 1$, et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, alors (T_0, T_1, \dots, T_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

✓ Propriété 4.4.3.12

Soient E un \mathbb{K} -ev. de dimension finie et non réduit au singleton $\{0_E\}$, et F un sous-ev. de E .

Alors F est un \mathbb{K} -ev. de dimension finie, et $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$.

🔍 Preuve

On pose $n = \dim_{\mathbb{K}} E$ et $B = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ une base de E .

▶ Si $F = \{0_E\}$, alors $\dim_{\mathbb{K}} F = 0 \leq n$.

▶ Si $F \neq \{0_E\}$, alors on considère :

$$I = \{\text{card}(L) \text{ tel que } L \text{ famille libre de } F\}$$

▷ On a $F \neq \{0_E\}$, alors il existe $x \in F \setminus \{0_E\}$, alors $\{x\}$ est une famille libre de F , donc $\text{card}(\{x\}) = 1 \in I$.

▷ De plus, $\forall L$ famille libre de F , L est aussi une famille libre de E , alors $\text{card}(L) \leq n$, donc I est majoré par n .

▷ Et comme $I \subset \mathbb{N}$, alors I admet une borne supérieure, que nous allons noter $\max(I) = d$.

▷ Soit B_F une famille libre de F telle que $\text{card}(B_F) = d$. Montrons que B_F est une base de F , i.e. $F = \text{Vect}(B_F)$.

— On a $\text{Vect}(B_F) \subset F$, car $B_F \subset F$ et F est un sev. de E .

— Supposons qu'il existe $y \in F$ tel que $y \notin \text{Vect}(B_F)$.

— Cela impliquerait que $B_F \cup \{y\}$ est une famille libre de F , alors $\text{card}(B_F \cup \{y\}) = d + 1 \in I$, ce qui est absurde, donc $\text{Vect}(B_F) = F$.

— Donc $\forall y \in F, y \in \text{Vect}(B_F)$, donc $F = \text{Vect}(B_F)$, et B_F est une base de F .

▷ Donc F est un \mathbb{K} -ev. de dimension finie.

▷ Et comme B_F est une base de F alors $\dim_{\mathbb{K}} F = \text{card}(B_F) = d \leq n = \dim_{\mathbb{K}} E$.

▷ D'où F est un \mathbb{K} -ev. de dimension finie, et $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$. ■

✓ Propriété 4.4.3.13

Soit E un \mathbb{K} -ev. et F, G deux sous-ev. de E tels que G est de dimension finie.

Si $F \subset G$, alors F est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} G$...

avec égalité si et seulement si $F = G$.

Q Preuve

F et G sont deux \mathbb{K} -ev, avec $F \subset G$ et G de dimension finie ($\dim_{\mathbb{K}} G < \infty$).

Donc F est de dimension finie, avec $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} G$.

Démonstration du cas de l'égalité :

- ▶ Dans le sens indirect (\Leftarrow), si $F = G$, alors $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} G$.
- ▶ Dans le sens direct (\Rightarrow), on pose $d = \dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} G$.
 - ▷ Soit $B = (e_1, \dots, e_d)$ une base de F .
 - ▷ Comme $F \subset G$, alors B est une famille libre de G .
 - ▷ Or $\text{card}(B) = d = \dim_{\mathbb{K}} G$, alors B est une base de G .
 - ▷ Donc $F = \text{Vect}(B) = G$, donc $F = G$.

■

🔗 Méthode

Pour montrer l'égalité de deux \mathbb{K} -ev. de dimension finie, il suffit de montrer que l'un est inclus dans l'autre, et que les deux espaces ont la même dimension.

🏠 Exercice 4.4.3.5

On pose $F = \{P(X+1) - P(X) \text{ tel que } P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

Montrer que $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Solution :

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k ((X+1)^k - X^k)$.

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) &= \sum_{k=0}^n a_k ((X+1)^k - X^k) \\ &= a_n \underbrace{((X+1)^n - X^n)}_{= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k ((X+1)^k - X^k)}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \\ &\in \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{aligned}$$

On en déduit que $F \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On a aussi :

$$P(X+1) - P(X) = \sum_{k=1}^n a_k ((X+1)^k - X^k).$$

Donc $F = \text{Vect}((X+1)^k - X^k)_{1 \leq k \leq n}$.

Montrons que $((X+1)^k - X^k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Pour cela, on peut utiliser deux méthodes...

- ▶ **Première méthode :** $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\deg((X+1)^k - X^k) = k-1$, alors $((X+1)^k - X^k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille échelonnée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors d'après l'exercice 2, $((X+1)^k - X^k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- ▶ **Deuxième méthode :** Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k ((X+1)^k - X^k) = 0$,

alors $\sum_{k=1}^n \lambda_k((X+1)^k - X^k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(X+1)^k - \sum_{k=1}^n \lambda_k X^k$, donc $\sum_{k=1}^n \lambda_k(X+1)^k = \sum_{k=1}^n \lambda_k X^k$.

- ▷ On pose $A(X) = \sum_{k=1}^n \lambda_k X^k$, alors $A(X+1) = A(X)$, donc A admet une infinité de racines (tous les éléments de \mathbb{R} , en commençant par 0, puis 1, puis 2...), donc A est le polynôme nul, donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k = 0$, donc $((X+1)^k - X^k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On en déduit que $((X+1)^k - X^k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de F , donc $\dim_{\mathbb{R}} F = n$.

Or $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$, alors F et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont deux \mathbb{R} -ev. de dimension finie de même dimension, avec $F \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

✓ Propriété 4.4.3.14

Soit E un \mathbb{K} -ev.

E est de dimension infinie si et seulement si E admet une famille libre infinie.

🔍 Preuve

- ▶ \Leftarrow : Si $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$ (E est de dimension finie), alors E admet une famille génératrice finie de cardinal d . Donc $\forall L$ famille libre de E , $\text{card}(L) \leq d$, donc E n'admet pas de famille libre infinie, ce qui est absurde, donc E est de dimension infinie.
- ▶ \Rightarrow : Supposons que E est de dimension infinie.
 - ▷ Comme $E \neq \{0_E\}$, alors il existe $e_1 \in E \setminus \{0_E\}$, alors $\{e_1\}$ est une famille libre de E .
 - ▷ On a aussi $E \neq \text{Vect}(e_1)$ car E est de dimension infinie et il ne peut pas avoir de famille génératrice finie, alors il existe $e_2 \in E \setminus \text{Vect}(e_1)$, alors $\{e_1, e_2\}$ est une famille libre de E .
 - ▷ On a aussi $E \neq \text{Vect}(e_1, e_2)$, et on continue ainsi de suite pour construire une famille libre infinie de E .
 - ▷ Pour démontrer cela rigoureusement, nous allons procéder par récurrence pour construire une famille libre de cardinal n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et ainsi construire une famille libre infinie de E .
 - **Initialisation** : $n = 1$, on a déjà construit une famille libre de cardinal 1 de E , à savoir $\{e_1\}$.
 - **Hérédité** : Supposons que nous avons construit une famille libre de cardinal n , à savoir $\{e_1, \dots, e_n\}$, alors comme E est de dimension infinie, alors $E \neq \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors il existe $e_{n+1} \in E \setminus \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ est une famille libre de cardinal $n + 1$ de E .
 - ▷ Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille libre de cardinal n de E , alors il existe une famille libre infinie de E .
- ▶ Donc E est de dimension infinie si et seulement si E admet une famille libre infinie.



Exercice 4.4.3.6

On pose $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$. Montrer que E est de dimension infinie.

Solution :

On va s'aider de la fonction exponentielle de base e^α pour construire une famille libre infinie de E .

On pose $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$.

On sait déjà que $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est une famille libre, et infinie, donc E est de dimension infinie.

Sinon, on peut aussi utiliser une fonction polynomiale pour construire une famille libre infinie de E , en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, e_n(x) = x^n$$

4.4 Espace produit

Définition 4.4.4.9

Soient E, F deux \mathbb{K} -ev.

On pose $E \times F = \{(x, y) \text{ tel que } x \in E, y \in F\}$.

$E \times F$ est un \mathbb{K} -ev. pour les lois suivantes :

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\forall (x, y) \in E \times F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Remarque 4.4.4.6

- ▶ L'élément neutre de la loi $+$ dans $E \times F$ est $(0_E, 0_F)$.
- ▶ Le symétrique de (x, y) par rapport à $+$ dans $E \times F$ est $(-x, -y)$.

Propriété 4.4.4.15

Si E et F sont deux \mathbb{K} -ev. de dimension finie, alors $E \times F$ est aussi de dimension finie, et $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}} E + \dim_{\mathbb{K}} F$.

Preuve

Soient $n = \dim_{\mathbb{K}} E$ et $m = \dim_{\mathbb{K}} F$, et $B_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et $B_F = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F .

Donc $\forall (x, y) \in E \times F, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \exists! \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ tels que :

$$(x, y) = (x, 0_F) + (0_E, y) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, 0_F \right) + \left(0_E, \sum_{i=1}^m \mu_i f_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^m \mu_i f_i \right)$$

Donc $B_{E \times F} = (e_i, 0_F)_{1 \leq i \leq n} \cup (0_E, f_j)_{1 \leq j \leq m}$ est une base de $E \times F$.

On en déduit que $E \times F$ est de dimension finie,

et $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \text{card}(B_{E \times F}) = n + m = \dim_{\mathbb{K}} E + \dim_{\mathbb{K}} F$. ■

Remarque 4.4.4.7

En général, si E_1, \dots, E_n sont des \mathbb{K} -ev., alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est aussi un \mathbb{K} -ev. pour les lois suivantes : $\forall x = (x_1, \dots, x_r) \in \prod_{k=1}^r E_k, \forall y = (y_1, \dots, y_r) \in \prod_{k=1}^r E_k, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_r + y_r)$ et $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_r)$.

Si, de plus, les $(E_k)_{1 \leq k \leq r}$ sont de dimension finie, alors $\dim_{\mathbb{K}}(\prod_{k=1}^r E_k) = \sum_{k=1}^r \dim_{\mathbb{K}} E_k$.

Exemple 4.4.4.10

\mathbb{K} est un \mathbb{K} -ev. de dimension 1, alors $\mathbb{K}^n = \prod_{k=1}^n \mathbb{K}$ est un \mathbb{K} -ev. de dimension $\sum_{i=1}^n 1 = n$.

4.5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 4.4.5.10

Soit E un \mathbb{K} -ev. et (V_1, \dots, V_p) une famille de vecteurs de E .

On appelle rang de la famille (V_1, \dots, V_p) , noté $\text{rg}(V_1, \dots, V_p)$, le nombre $r = \dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(V_1, \dots, V_p)$.

Exemple 4.4.5.11

Pour $E = \mathbb{R}^4$, et $V_1 = (1, 2, 1, -1)$, $V_2 = (-1, -2, 2, -2)$, $V_3 = (2, 4, 0, 0)$.

La famille (V_1, V_2, V_3) est une famille de vecteurs de E .

On a $\text{Vect}(V_1, V_2, V_3) = \text{Vect}(V_1, V_2)$, car $V_3 = 2V_1 - V_2$, alors $\dim_{\mathbb{R}} \text{Vect}(V_1, V_2, V_3) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Vect}(V_1, V_2)$. De plus, V_1 et V_2 sont linéairement indépendants, alors $\dim_{\mathbb{R}} \text{Vect}(V_1, V_2) = 2$. Donc $\text{rg}(V_1, V_2, V_3) = 2$.

✓ **Propriété 4.4.5.16**

Soient $V_1, \dots, V_p \in E$.

$$\text{rg}(V_1, \dots, V_p) \leq p$$

avec égalité si et seulement si (V_1, \dots, V_p) est une famille libre de E ,
i.e. $\text{rg}(V_1, \dots, V_p) = p \iff (V_1, \dots, V_p)$ est une famille libre de E .

Q **Preuve**

On pose $F = \text{Vect}(V_1, \dots, V_p)$, alors $\dim_{\mathbb{K}} F = \text{rg}(V_1, \dots, V_p) = r$.

Donc $r = \dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(V_1, \dots, V_p) \leq \text{card}(V_1, \dots, V_p) = p$.

Démonstration dans le sens indirect :

Si (V_1, \dots, V_p) est une famille libre, alors $\text{Vect}(V_1, \dots, V_p)$ est une base de F et donc $\dim_{\mathbb{K}} F = \text{card}(V_1, \dots, V_p) = p$, alors $\text{rg}(V_1, \dots, V_p) = p$.

Démonstration dans le sens direct :

Si (V_1, \dots, V_p) est une famille génératrice de F , avec $\text{card}(V_1, \dots, V_p) = p = \text{rg}(V_1, \dots, V_p)$, alors (V_1, \dots, V_p) est une base de F , donc forcément (V_1, \dots, V_p) est une famille libre de E .

Ainsi, $\text{rg}(V_1, \dots, V_p) = p \iff (V_1, \dots, V_p)$ est une famille libre de E . ■

✓ **Propriété 4.4.5.17**

Soient $V_1, \dots, V_p \in E$.

1. $\text{rg}(0_E, V_1, \dots, V_p) = \text{rg}(V_1, \dots, V_p)$
2. $\forall \sigma \in S_p, \text{rg}(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(p)}) = \text{rg}(V_1, \dots, V_p)$ où S_p est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, p\}$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \text{rg}(\lambda V_1, V_2, \dots, V_p) = \text{rg}(V_1, V_2, \dots, V_p)$
4. $\forall \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \text{rg}(V_1 + \sum_{k=2}^p \lambda_k V_k, V_2, \dots, V_p) = \text{rg}(V_1, V_2, \dots, V_p)$

Q **Preuve**

Démonstration de la quatrième propriété :

On pose $V'_1 = V_1 + \sum_{k=2}^p \lambda_k V_k$, alors $\text{Vect}(V'_1, V_2, \dots, V_p) = \text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_p)$, donc $\dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(V'_1, V_2, \dots, V_p) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_p)$, donc $\text{rg}(V'_1, V_2, \dots, V_p) = \text{rg}(V_1, V_2, \dots, V_p)$. ■

4.6 Famille échelonnée

Définition 4.4.6.11 (Famille échelonnée)

Soit E un \mathbb{K} -ev. de dimension finie, et (e_1, \dots, e_n) une base de E (donc $\dim_{\mathbb{K}} E = n$). Soient $p \leq n$ et $v_1, \dots, v_p \in E$ une famille de vecteurs. On a $\forall 1 \leq i \leq p, v_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} e_j$ (tous ces vecteurs peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de la base de E). Si $\exists \varphi : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ strictement croissante telle que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, v_i = \sum_{j=\varphi(i)}^n \lambda_{i,j} e_j$ avec $\forall i, \lambda_{i,\varphi(i)} \neq 0$, alors on dit que (v_1, \dots, v_p) est une famille échelonnée de E .

Plus concrètement, si le vecteur $v_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$, on aura aussi $v_1 = \lambda_{1,\varphi(1)} e_{\varphi(1)} + \dots + \lambda_{1,n} e_n$.

Et pour le vecteur $v_2 = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \dots + \lambda'_n e_n$, on aura aussi $v_2 = \lambda_{2,\varphi(2)} e_{\varphi(2)} + \dots + \lambda_{2,n} e_n$, et on ne retrouvera pas de composante de $e_{\varphi(1)}$ dans v_2 , et ainsi de suite pour les autres vecteurs de la famille, parce que l'application φ est strictement croissante.

Il s'agit d'une généralisation des familles de vecteurs échelonnés dans \mathbb{K}^n à n'importe quel \mathbb{K} -ev, qu'on avait déjà utilisée dans l'exercice 2.

Exemple 4.4.6.12

Dans $E = \mathbb{R}^4$, la famille de vecteurs $((1, 2 - 1, -3), (0, -1, 3, 0), (0, 0, 0, 2))$ est une famille échelonnée de E .

► En effet, on a :

▷ $v_1 = (1, 2, -1, -3) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3 - 3 \cdot e_4$, alors $\varphi(1) = 1$ et $\lambda_{1,\varphi(1)} = \lambda_{1,1} = 1 \neq 0$.

▷ $v_2 = (0, -1, 3, 0) = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$, alors $\varphi(2) = 2$ et $\lambda_{2,\varphi(2)} = \lambda_{2,2} = -1 \neq 0$.

▷ $v_3 = (0, 0, 0, 2) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 2 \cdot e_4$, alors $\varphi(3) = 3$ et $\lambda_{3,\varphi(3)} = \lambda_{3,3} = 2 \neq 0$.

► On peut construire l'application $\varphi : \llbracket 1, 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 4 \rrbracket$ strictement croissante telle que $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 4$ et $\lambda_{1,\varphi(1)} = 1 \neq 0, \lambda_{2,\varphi(2)} = -1 \neq 0, \lambda_{3,\varphi(3)} = 2 \neq 0$.

Propriété 4.4.6.18

Toute famille échelonnée de E est une famille libre de E .

Preuve

Soit (v_1, \dots, v_p) une famille échelonnée de E .

Supposons que (v_1, \dots, v_p) n'est pas une famille libre de E .

Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, pas tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0_E$.

Soit $i_0 = \min\{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ tel que } \lambda_i \neq 0\}$, alors $\alpha_{i_0} \neq 0$ et $\forall i < i_0, \lambda_i = 0$.

On isole la somme à partir de i_0 : $\sum_{i=i_0}^p \lambda_i v_i = 0_E$.

Donc $\alpha_{i_0} v_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^p \lambda_i v_i = 0_E$.

Donc $\alpha_{i_0} \lambda_{i_0, \varphi(i_0)} e_{\varphi(i_0)} + \underbrace{\alpha_{i_0} \sum_{j=\varphi(i_0)+1}^n \lambda_{i_0, j} e_j + \sum_{i=i_0+1}^p \lambda_i v_i}_{\in \text{Vect}(e_{\varphi(i_0)+1}, \dots, e_n)} = 0_E$ (sachant que $\varphi(i_0) + 1 >$

$\varphi(i_0)$).

Or $(e_{\varphi(i_0)}, e_{\varphi(i_0)+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre de E , alors $\alpha_{i_0} \lambda_{i_0, \varphi(i_0)} = 0$, ce qui est absurde, car $\alpha_{i_0} \neq 0$ et $\lambda_{i_0, \varphi(i_0)} \neq 0$.

D'où (v_1, \dots, v_p) est une famille libre de E . ■

Remarque 4.4.6.8 (Ordre)

Si, $\forall 1 \leq i \leq p, v_i = \sum_{j=1}^{\varphi(i)} \lambda_{i,j} e_j$ avec $\varphi : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ strictement croissante et $\forall i, \lambda_{i, \varphi(i)} \neq 0$, alors (v_1, \dots, v_p) est aussi une famille échelonnée de E .

Les $(\lambda_{i, \varphi(i)})_{1 \leq i \leq p}$ sont appelés les pivots de la famille échelonnée (v_1, \dots, v_p) .

Exemple 4.4.6.13

Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n .

On pose $\forall 1 \leq i \leq n, v_i = \sum_{k=i}^n e_k$.

La famille de vecteurs (v_1, \dots, v_n) est une base de \mathbb{K}^n .

Démonstration :

- ▶ La famille est libre car (v_1, \dots, v_n) est une famille échelonnée de \mathbb{K}^n .
- ▶ Son cardinal est égal à n , qui est aussi la dimension de \mathbb{K}^n .
- ▶ Donc (v_1, \dots, v_n) est une famille libre de \mathbb{K}^n de cardinal n , et $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, alors (v_1, \dots, v_n) est une base de \mathbb{K}^n (voir propriété 11).

Méthode

Pour trouver le rang d'une famille de vecteurs (v_1, \dots, v_p) , on peut faire des combinaisons linéaires de ces vecteurs pour construire une famille échelonnée de E , et le rang de la famille (v_1, \dots, v_p) sera égal au nombre de vecteurs de la famille échelonnée que nous avons construite.

Exemple 4.4.6.14

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère la famille de vecteurs :

$$V_1 = (1, -1, -1, -1)$$

$$V_2 = (1, 1, -1, -1)$$

$$V_3 = (1, 1, 1, -1)$$

$$V_4 = (3, 1, -1, -3)$$

Pour déterminer le rang de la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) , on suit les étapes suivantes :

► On pose :

$$\triangleright V'_2 = V_2 - V_1 = (0, 2, 0, 0),$$

$$\triangleright V'_3 = V_3 - V_1 = (0, 2, 2, 0),$$

$$\triangleright V'_4 = V_4 - 3V_1 = (0, 4, 2, 0).$$

► On continue et on pose :

$$\triangleright V''_3 = V'_3 - V'_2 = (0, 0, 2, 0),$$

$$\triangleright V''_4 = V'_4 - 2V'_2 = (0, 0, 2, 0).$$

► On a construit la famille échelonnée $(V_1, V'_2, V''_3, V''_4) = (V_1, V'_2, V''_3)$ de E , dont le rang est 3 (sachant que le rang d'une famille libre est égal à son cardinal, voir propriété 16), alors $\text{rg}(V_1, V_2, V_3, V_4) = 3$.

5 Somme d'une famille de sous-espaces vectoriels

5.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 5.5.1.12 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

Soient E un \mathbb{K} -ev. et F, G deux sous-ev. de E .

On définit l'ensemble $F + G = \{x + y \text{ tel que } x \in F, y \in G\} \subset E$ comme la somme de F et G .

Propriété 5.5.1.19

- ▶ $F + G$ est un sev. de E .
- ▶ $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

Preuve

Démonstration de la première propriété :

- ▶ $F + G \subset E$, car $F \subset E$ et $G \subset E$.
- ▶ $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$, alors $F + G \neq \emptyset$.
- ▶ Soient $u, v \in F + G$, alors $\exists x_1, x_2 \in F, y_1, y_2 \in G$ tels que $u = x_1 + y_1$ et $v = x_2 + y_2$, alors $u + v = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in F + G$.
- ▶ On a aussi $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F + G, u + \lambda v = (x_1 + y_1) + \lambda(x_2 + y_2) = (x_1 + \lambda x_2) + (y_1 + \lambda y_2) \in F + G$, sachant que F et G sont des sev. de E .
- ▶ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in F + G$, alors $\exists x \in F, y \in G$ tels que $u = x + y$, alors $\lambda u = (\lambda x) + (\lambda y) \in F + G$.
- ▶ Donc $F + G$ est un sev. de E .

Démonstration de la deuxième propriété :

- ▶ $F + G \subset \text{Vect}(F \cup G)$, car, par définition $\text{Vect}(F \cup G)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.
- ▶ On sait que $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$, alors $F \cup G \subset F + G$, alors $\text{Vect}(F \cup G) \subset F + G$.

- ▶ *Méthode alternative* : On peut considérer les combinaisons linéaires de $F \cup G$ pour construire $\text{Vect}(F \cup G)$, et on peut montrer que toutes ces combinaisons linéaires sont aussi des éléments de $F + G$, alors $\text{Vect}(F \cup G) \subset F + G$.
- ▶ Donc $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$. ■

⚠ Attention

On ne peut pas sommer deux sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels différents.

📖 Définition 5.5.1.13 (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels)

Soient E un \mathbb{K} -ev. et F, G deux sous-ev. de E .

La somme $F + G$ est une somme directe de F et G si $F \cap G = \{0_E\}$, c'est à dire si F et G n'ont que le vecteur nul en commun.

📖 Définition 5.5.1.14 (Sous-espace vectoriel supplémentaire)

Soient E un \mathbb{K} -ev. et F un sev. de E .

On dit que G est un sev. supplémentaire de F dans E si $E = F \oplus G$, c'est à dire si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

⚠ Attention

Il ne faut pas confondre "supplémentaire" et "complémentaire". En effet, si F est un sev. de E , alors $C_E(F)$ (le complémentaire de F dans E) n'est pas un sev. car $0_E \notin C_E(F)$, alors $C_E(F)$ ne peut pas être un sev. supplémentaire de F dans E .

💬 Remarque 5.5.1.9

Si $E = F \oplus G$, alors $G \subset C_E(F) \cup \{0_E\}$, car, en posant $x \in G \setminus \{0_E\}$, alors si $x \in F$ on a $x \in F \cap G = \{0_E\}$, ce qui est absurde, alors $x \notin F$.

✅ Propriété 5.5.1.20

Soient E un \mathbb{K} -ev. et F, G deux sous-ev. de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ▶ $E = F \oplus G$.
- ▶ $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
- ▶ $\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$.

Q Preuve

Démonstration de la première équivalence : [(1) \iff (2)]

$E = F \oplus G$ signifie que $E = F + G$ et que $F \cap G = \{0_E\}$, donc $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

Réciproquement, si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, alors $E = F \oplus G$.

Enfin, on a simplement utilisé la définition de la somme directe de F et G pour démontrer la première équivalence.

Démonstration de la deuxième équivalence : [(2) \iff (3)]

Supposons que $E = F + G$ et que $F \cap G = \{0_E\}$.

► **Démonstration de l'existence de la décomposition :** Soit $x \in E$, alors $\exists y \in F, z \in G$ tels que $x = y + z$, car $E = F + G$.

► **Démonstration de l'unicité de la décomposition :**

▷ **Dans le sens direct \implies :** Supposons qu'il existe aussi $y' \in F, z' \in G$ tels que $x = y' + z'$, alors on a $(y - y') + (z - z') = 0_E$, alors $(y - y') = -(z - z')$, alors $(y - y') \in F \cap G$, alors $(y - y') = 0_E$, alors $y = y'$ et aussi $z = z'$, donc $\exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$.

▷ **Réciproquement,** supposons que $\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$, alors $\forall x \in E, \exists(y, z) \in F \times G, x = y + z$, alors $E = F + G$. De plus, supposons qu'il existe un élément non nul de $F \cap G$, alors il existe un élément non nul de F qui est aussi dans G , ce qui contredit l'unicité de la décomposition de cet élément en somme d'un élément de F et d'un élément de G . Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

Ainsi, les propriétés sont équivalentes. ■

● Remarque 5.5.1.10

$E = F \oplus G \iff \psi : \begin{matrix} F \times G & \rightarrow & E \\ (y, z) & \mapsto & y + z \end{matrix}$ est bijective.

🔗 Méthode

Pour montrer que $E = F + G$, on peut :

- Fixer $x \in E$.
- Puis chercher un élément $y \in F$ tel que $x - y \in G$.

✎ Exemple 5.5.1.15

► Dans $E = \mathbb{K}^n$, on pose : $H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ et $D = \mathbb{K} \cdot \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{=e}$. On a $\mathbb{K}^n = H \oplus D$.

▷ On va suivre la méthode mentionnée précédemment pour montrer que $\mathbb{K}^n = H + D$.

- Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
- On cherche un élément $y \in D$ tel que $x - y \in H$ (c'est plus simple de trouver un élément de D que de trouver un élément de H).
- On a $y \in D \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda e$.
- Alors $x - y = (x_1 - \lambda, \dots, x_n - \lambda)$.
- Et on a

$$\begin{aligned} x - y \in H &\iff \sum_{i=1}^n (x_i - \lambda) = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^n x_i - n\lambda = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

- On peut aussi noter λ par λ_x pour montrer que λ dépend de x .
- Donc $x = \underbrace{(x - \lambda_x \cdot e)}_{\in H} + \underbrace{\lambda_x \cdot e}_{\in D}$.
- D'où $\mathbb{K}^n = H + D$.
- ▷ Montrons maintenant que l'intersection de H et D est réduite à $\{0_E\}$.
 - Soit $x \in H \cap D$, alors $x \in D \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda e$.
 - De plus, $x \in H \implies \sum_{i=1}^n x_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda = 0$, alors $n \cdot \lambda = 0$, donc $\lambda = 0$, alors $x = 0 \cdot e = 0_E$.
 - Donc $H \cap D = \{0_E\}$.

⚡ Exercice 5.5.1.7

► **Exercice 1** : Montrer que $E = H \oplus F$, avec :

- ▷ $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$.
- ▷ $H = \{f \in E \text{ telle que } \int_a^b f(x)dx = 0\}$.
- ▷ $F = \{f \in E \text{ telle que } f \text{ est constante}\}$.

► **Exercice 2** : Donner un supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Solution de l'exercice 1 :

On utilise la méthode mentionnée précédemment pour montrer que $E = H + F$. Ensuite, on montre que $H \cap F = \{0_E\}$. On cherchera un $y \in F$ tel que $f - y \in H$ (c'est plus simple).

Solution de l'exercice 2 :

On cherche un ensemble candidat S tel que $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}[X] + S$ et $\mathbb{K}[X] \cap S = \{0_E\}$. On va donc le définir à partir de la recherche d'un élément $Y \in S$ tel que $P - Y \in \mathbb{K}[X]$ pour tout $P \in \mathbb{K}(X)$, ce qui nous rappelle facilement la DES de P , avec $P - Y$ la partie entière de P et Y la partie fractionnaire de P .

Donc on peut poser $S = \{R \in \mathbb{K}(X) \text{ tel que } R(0) = 0\}$. On montre que c'est un sev. de $\mathbb{K}(X)$, que $\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}[X] + S$ et que $\mathbb{K}[X] \cap S = \{0_E\}$, ce qui nous permettra de conclure que S est un sev. supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Remarque 5.5.1.11 (Unicité du supplémentaire)

Le supplémentaire n'est pas unique.

En effet, en reprenant l'exemple 15, on peut aussi montrer que $\mathbb{K}^n = H \oplus D'$, avec $D' = \mathbb{K} \cdot (1, 0, \dots, 0)$, et $D' \neq D$.

5.2 Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels

Définition 5.5.2.15 (Somme d'une famille de sous-espaces vectoriels)

Soient E un \mathbb{K} -ev. et F_1, \dots, F_n des sev. de E .

1. On définit la somme des $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ par $\sum_{k=1}^n F_k = \{\sum_{k=1}^n x_k \text{ tel que } x_k \in F_k\} \subset E$.
2. La somme des $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$ est dite directe si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k, \sum_{k=1}^n x_k = 0_E \implies \forall k, x_k = 0_E$.
Dans ce cas, on note la somme par $\bigoplus_{k=1}^n F_k$.

Propriété 5.5.2.21

Soient E un \mathbb{K} -ev. et F_1, \dots, F_n des sev. de E .

1. $\sum_{k=1}^n F_k$ est un sev. de E .
2. $\sum_{k=1}^n F_k = \bigoplus_{k=1}^n F_k \iff \forall x \in \sum_{k=1}^n F_k, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^n x_k$.

Q Preuve

1. **Démonstration de la première propriété :** La première démonstration est facile. On utilise simplement la caractérisation d'un sous-espace vectoriel, sans oublier de mentionner que la somme est incluse dans E .
2. **Démonstration de la deuxième propriété :**
 - a) Dans le sens direct (\implies) :
 - i. Pour démontrer l'existence, on prend $x \in \sum_{k=1}^n F_k$, alors $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k$ tels que $x = \sum_{k=1}^n x_k$.
 - ii. Pour démontrer l'unicité, supposons qu'il existe aussi $(y_1, \dots, y_n) \in \prod_{k=1}^n F_k$ tels que $x = \sum_{k=1}^n y_k$, alors $\sum_{k=1}^n (x_k - y_k) = 0_E$, alors $\forall k, x_k - y_k = 0_E$, alors $\forall k, x_k = y_k$ (parce que la somme est directe), donc $\exists!(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k$ tels que $x = \sum_{k=1}^n x_k$.
 - b) Dans le sens indirect (\impliedby) :

- i. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k$ tels que $\sum_{k=1}^n x_k = 0_E$.
- ii. Alors, par unicité de la décomposition, on a $\forall k, x_k = 0_E$, donc $\sum_{k=1}^n F_k$ est directe. ■

☰ Définition 5.5.2.16

Soient E un \mathbb{K} -ev. et F_1, \dots, F_n des sev. de E .

On dit que E est la somme directe de F_1, \dots, F_n si $E = \bigoplus_{k=1}^n F_k$, donc si et seulement si $\forall x \in E, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k$ tels que $x = \sum_{k=1}^n x_k$.

(Il s'agit du cas particulier où la somme de F_1, \dots, F_n est égale à E et que cette somme est directe.)

✔ Propriété 5.5.2.22

Soient E un \mathbb{K} -ev. et F_1, \dots, F_n des sev. de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\sum_{k=1}^n F_k = \bigoplus_{k=1}^n F_k$.
2. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, F_i \cap \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n F_k = \{0_E\}$.
3. $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, F_i \cap \sum_{k=1}^{i-1} F_k = \{0_E\}$.

🔍 Preuve

La démonstration se fait par raisonnement circulaire : (1) \implies (2) \implies (3) \implies (2).

► Démonstration de la troisième implication : [(3) \implies (2)]

On va raisonner par absurde.

Supposons que $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_i \neq 0$.

On pose $S = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } x_k \neq 0\}$.

Alors $\begin{cases} S \text{ est majorée.} \\ S \text{ est non vide.} \\ \implies S \text{ admet une valeur maximale.} \end{cases}$

Posons $s = \max S$, alors $s \in S$ et $x_s \neq 0$.

On a $\sum_{k=1}^n x_k = 0_E$.

On décompose la somme $\sum_{k=1}^n x_k$ en trois parties :

$$\sum_{k=1}^n x_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{s-1} x_k}_{\in \sum_{k=1}^{s-1} F_k} + \underbrace{x_s}_{\in F_s} + \underbrace{\sum_{k=s+1}^n x_k}_{=0_E}$$

Alors : $\sum_{k=1}^{s-1} x_k = -x_s$.

Donc $x_s \in F_s \cap \sum_{k=1}^{s-1} F_k$, et comme l'intersection est réduite au vecteur nul $\{0_E\}$, alors $x_s = 0_E$, ce qui est absurde. ■

recop

● **Remarque 5.5.2.12**

$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, F_i \cap F_j = \{0_E\}$ n'implique pas que $\sum_{k=1}^n F_k = \bigoplus_{k=1}^n F_k$.
 Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^2$, on pose $F_1 = \mathbb{R} \cdot \underbrace{(1, 0)}_{=e_1}$, $F_2 = \mathbb{R} \cdot \underbrace{(0, 1)}_{=e_2}$ et $F_3 = \mathbb{R} \cdot \underbrace{(1, 1)}_{=e}$.
 On a $e_1 + e_2 - e = 0_E$, alors $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas une somme directe, même si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, $F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$.

5.3 Dimension de la somme de sous-espaces vectoriels

★ **Théorème 5.5.3.5**

Soient E un \mathbb{K} -ev. et F_1, \dots, F_n des sev. de E de dimension finie.
 On pose $\forall 1 \leq i \leq n, B_i$ est une base de F_i .
 Alors $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$ est une base de $\bigoplus_{\mathbb{K}}^n F_k$, et $\dim(\bigoplus_{\mathbb{K}}^n F_k) = \sum_{i=1}^n \dim(F_i)$.

🔍 **Preuve**

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $B_i = (e_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i}$, avec $n_i = \text{card}(B)_i = \dim(F_i)$.
 Soit $x \in \bigoplus_{k=1}^n F_k$, alors $\exists!(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k$ tels que $x = \sum_{k=1}^n x_k$.
 Et on a $\forall 1 \leq i \leq n, x_i \in F_i = \text{Vect}(B_i)$, alors $\exists!(\lambda_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i} \in \mathbb{K}^{n_i}$ tels que $x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} e_{i,j}$.
 Donc $x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} e_{i,j}$.
 Et donc $B = (e_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n_i}}$ est une famille génératrice de $\bigoplus_{k=1}^n F_k$. ■

● **Remarque 5.5.3.13**

La base B est appelée la base adaptée à la somme directe.
 Et on écrit $B \stackrel{\text{noté}}{=} (B_1, \dots, B_n)$ pour montrer que B est constituée de la réunion des bases B_1, \dots, B_n , au lieu de $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$.

⚠ **Attention**

La notation $B = (B_1, \dots, B_n)$ ne signifie pas que B est un n -uplet de bases, mais plutôt que B est constituée de la réunion des bases B_1, \dots, B_n . C'est la notation de la **base adaptée** à la somme directe.

→ **Conséquence 5.5.3.4**

Si E est \mathbb{K} -ev. et F_1, \dots, F_n sont des sev. de dimensions finies de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^n F_k$, alors E est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \sum_{i=1}^n \dim_{\mathbb{K}}(F_i)$.

★ **Théorème 5.5.3.6 (Lemme)**

Tout sous-espace vectoriel R d'un \mathbb{K} -ev. de dimension finie E admet un supplémentaire dans E , c'est à dire que :

$$\forall F \text{ sev. de } E, \exists G \text{ sev. de } E, E = F \oplus G$$

Q **Preuve**

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On admettra que celui-ci est différent de $\{0_E\}$, sinon $E = \{0_E\} \oplus E$ et la propriété est vérifiée.

Montrons que $\exists H$ sev. de E tel que $F \oplus H = E$.

- ▶ On sait que F est de dimension finie (parce que E est de dimension finie). On pose $p = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ et on considère une base $B_1 = (e_1, \dots, e_p)$ de F .
- ▶ B_1 est une famille libre de E , alors on peut compléter B_1 en une base $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E , en posant $n = \dim_{\mathbb{K}}(E) \geq p$, en utilisant le théorème de la base incomplète (voir théorème 3).
- ▶ On pose $H = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, alors H est un sev. de E .
- ▶ On a donc $\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

▶ Alors $x = \underbrace{\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i}_{\in H}$.

- ▶ Donc $\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times H, x = y + z$, alors $E = F \oplus H$. ■

★ **Théorème 5.5.3.7 (Formule de Grassmann)**

Soient E un \mathbb{K} -ev. et F, G des sev. de E de dimension finie.

Alors $\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$.

Q **Preuve**

- ▶ On a $F = \text{Vect}(B_1)$ et $G = \text{Vect}(B_2)$, avec B_1 et B_2 des bases de F et G respectivement.
- ▶ Donc $F + G = \text{Vect}(B_1) + \text{Vect}(B_2) = \text{Vect}(B_1 \cup B_2)$.

- ▶ Donc $F + G$ est de dimension finie.
- ▶ On a $F \cap G$ est un sev. de F , avec F de dimension finie.
- ▶ Alors, d'après le lemme 6, $F \cap G$ admet un supplémentaire dans F , c'est à dire que $\exists H$ sev. de F tel que $F = (F \cap G) \oplus H$.
- ▶ Montrons alors que $F + G = H \oplus G$.
 - ▷ On a $G \cap H = G \cap (F \cap H) = (F \cap G) \cap H = \{0_E\}$, sachant que $H \subset F$. (1)
 - ▷ Soit $x \in F + G$, alors $\exists y \in F, z \in G$ tels que $x = y + z$.
 - ▷ Or $y \in F \implies \exists!(z_1, h) \in (F \cap G) \times H$ tels que $y = z_1 + h$, alors $x = h + (z_1 + z)$, avec $h \in H$ et $z_1 + z \in G$, alors $x \in H + G$. (2)
 - ▷ De (1) et (2), on a $F + G = H \oplus G$.
- ▶ Donc $\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(H) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$, et $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) + \dim_{\mathbb{K}}(H)$, alors $\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$. ■

● Remarque 5.5.3.14

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un \mathbb{K} -ev. E .
Si H est un supplémentaire de $F \cap G$ dans F , alors H est un supplémentaire de G dans $F + G$, i.e. : $F + G = H \oplus G$.

→ Conséquence 5.5.3.5

Soient E un \mathbb{K} -ev (de dimension finie) et F, G des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $E = F \oplus G$.
2. $\begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) \end{cases}$
3. $\begin{cases} E = F + G \\ \dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) \end{cases}$

🔍 Preuve

La démonstration se fait par raisonnement circulaire : (1) \implies (2) \implies (3) \implies (1).

- ▶ La première implication [(1) \implies (2)] est facile à démontrer. On utilise simplement la définition de la somme directe et la formule de Grassmann pour montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$.

- ▶ Démonstration de la deuxième implication [(2) \implies (3)] :
 - ▷ On sait que la dimension de $F + G$ est égale à $\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$, or $F \cap G$ est réduit au singleton vecteur nul $\{0_E\}$.
 - ▷ Alors $\dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = 0$, alors $\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.
 - ▷ Et on sait que $F + G \subset E$, alors $E = F + G$.
- ▶ Démonstration de la troisième implication [(3) \implies (1)] :
 - ▷ On sait que $E = F + G$, donc $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F + G)$.
 - ▷ C'est-à-dire que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$, alors $\dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = 0$, alors $F \cap G = \{0_E\}$ (c'est le seul sous-espace vectoriel de dimension nulle), alors $E = F \oplus G$.



6 Hyperplans

☰ Définition 6.6.0.17 (Hyperplan)

Soient E un \mathbb{K} -ev. et H un sev. de E .

On dit que H est un hyperplan de E lorsque $\exists a \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.

✎ Exemple 6.6.0.16

1. $H = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$ est un hyperplan de \mathbb{K}^n , sachant qu'on a déjà montré $\mathbb{K}^n = H \oplus \mathbb{K} \cdot e_1$.
2. $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$, sachant que $\mathbb{K}_n[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus \mathbb{K} \cdot X^n$ (on peut le démontrer en utilisant la conséquence 5).
3. Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. On pose $H = \{f \in E \text{ telle que } \int_a^b f(x)dx = 0\}$ et $D = \{f \in E \text{ telle que } f \text{ est constante}\}$. On a $D = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$ avec $\mathbb{1} : \begin{matrix} [a, b] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & 1 \end{matrix}$, et on a $E = H \oplus \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$. En effet, on a déjà montré que $E = H \oplus D$ (exercice 7).

✓ Propriété 6.6.0.23

Soient E un \mathbb{K} -ev. et H un sev. de E tel que $H \neq E$. Alors :
 H est un hyperplan de $E \iff \forall b \in E \setminus H, E = H \oplus \mathbb{K} \cdot b$.

🔍 Preuve

- ▶ Démonstration dans le sens indirect (\Leftarrow) : En utilisant la définition.
- ▶ Démonstration de le sens direct (\Rightarrow) :
 - ▷ H est un hyperplan de E , alors $\exists a \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.
 - ▷ Prenons $b \in E \setminus H$.
 - ▷ Comme $b \in E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.
 - ▷ Alors $\exists!(h_1, \lambda_1) \in H \times \mathbb{K}$ tels que :

$$b = h_1 + \lambda_1 a$$

- ▷ Si $\lambda_1 = 0$, alors $b = h_1 \in H$, ce qui est absurde, alors $\lambda_1 \neq 0$.

▷ Et on a, $\forall x \in E, \exists!(h_2, \lambda_2) \in H \times \mathbb{K}$ tels que :

$$\begin{aligned} x &= h_2 + \lambda_2 a \\ &= h_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_1^{-1}(b - h_1) \\ &= (h_2 - \lambda_2 \cdot \lambda_1^{-1} h_1) + \lambda_2 \cdot \lambda_1^{-1} b \end{aligned}$$

▷ Donc $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot b$.

▷ Si $x \in H_1 \cap \mathbb{K} \cdot b$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda b$ et $x \in H$.

▷ Mais comme $b \notin H$ alors $\lambda = 0$ alors $x = 0_E$.

▷ Alors $H \cap \mathbb{K} \cdot b = \{0_E\}$, alors $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot b$. CQFD. ■

✓ Propriété 6.6.0.24

Soient E un \mathbb{K} -ev. et $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n \in \mathbb{N}^*$, et H un sous-espace vectoriel de E .
 H est un hyperplan de $E \iff \dim_{\mathbb{K}}(H) = n - 1$.

🔍 Preuve

▶ Dans le sens direct \implies la démonstration est facile et se fait en utilisant la définition de l'hyperplan et la dimension d'une somme directe.

▶ Dans le sens indirect \impliedby :

▷ On pose H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

▷ On sait que $E = H \oplus F$.

▷ Donc $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(H)}_{=n} + \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(F)}_{=n-1}$.

▷ Alors $\dim_{\mathbb{K}}(F) = 1$.

▷ Donc $\exists a \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $F = \mathbb{K} \cdot a$.

▷ Donc $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$, alors H est un hyperplan de E . ■

⚠ Attention

Il faut toujours s'assurer que l'hyperplan "candidat" est bel et bien un sev. de E , avant de chercher à étudier sa dimension.

Par exemple, \mathbb{R}^{n-1} n'est pas un hyperplan de \mathbb{R}^n , même si $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n-1}) = n - 1$, parce que \mathbb{R}^{n-1} n'est pas un sev. de \mathbb{R}^n .

Fin du Chapitre XIV-A.

Index

droite vectorielle, 6

famille de vecteurs échelonnés, 28

famille échelonnée, 11, 21, 23

fonction exponentielle de base e^a , 12, 25

hyperplan, 6

polynôme de Lagrange, 11, 14

polynômes de Tchebychev, 21

surfamille, 10